Abschätzung von Verlustrisiken

Norbert Brunner und Manfred Kühleitner, Wien

Zusammenfassung: *Anleger kaufen und verkaufen regelmäßig Aktien oder Rohstoffe, um bei steigenden Kursen Gewinne zu erwirtschaften. Mit den Kursschwankungen ist aber auch ein Verlustrisiko verbunden, bis hin zum Bankrott. Dieser Artikel erklärt auf einfache Art, wie man dieses Marktrisiko eines Finanzproduktes aufgrund seiner historischen Wertentwicklung abschätzen kann. Dies ermöglicht einen elementaren Zugang bei gleichzeitiger realitätsnaher Verwendung großer Datenmengen.*

1 Einleitung

Ein Risiko ist ein Zufallsereignis, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines (finanziellen) Verlusts besteht. Wer an der Börse spekuliert, geht ein Risiko ein. Um das zukünftige Risiko abschätzen zu können, bedient man sich der vergangenen Kurse. Dabei nimmt man an, dass sich die Kurse in der nahen Zukunft ähnlich wie in der Vergangenheit entwickeln.

Hier wollen wir ein motivierendes Beispiel einer solchen Situation besprechen. Um die Komplexität des Finanzproduktes gering zu halten, fragen wir uns, welche Risiko-Überlegungen man beim Kauf von einer Feinunze Gold (31,1 g als Barren) anstellt. Diskutiert werden der Value-at-Risk, auch unter der Annahme einer Normalverteilung, die Länge von Gewinn- und Verlustserien, Volatilität, Histogramm und Q-Q-Plot. Dies kann in einem Tabellenkalkulationsprogramm elementar behandelt werden. Wir verwenden MS Excel 2016.

2 Daten

Als Datengrundlage verwenden wir die historischen Goldkurse. Diese sind online verfügbar auf www.onvista.de oder www.finanzen.at. Um die Daten zu bekommen, gibt man ein gewünschtes Startdatum in der Vergangenheit und den Mindestzeitraum an, z. B. 01.01.2001 und 15 Jahre.

	A	B	C
1	Datum	Schlusskurs	Rendite/Tag
2	14.05.2015	1067,50	
3	13.05.2015	1070,91	=(B2-B3)/B3 = −0,32 %
4	12.05.2015	1063,92	0,66 %

Tab. 1: Tagesschlusskurse (in Euro) für 1 Feinunze Gold (Ausschnitt aus einem Datenblatt mit 3.703 Handelstagen vom 02.01.2001 bis 14.05.2015)

Tabelle 1 ist ein Ausschnitt aus dem Datenblatt: Von den gelieferten Informationen (Eröffnungskurs, Tageshoch-, Tagestief- und Schlusskurs) verwenden wir nur das Datum und den Schlusskurs. Da der Kurs von Gold nur zweimal täglich beim Goldfixing in London festgelegt wird, ist dies kein wesentlicher Informationsverlust. Das Datum (Spalte A) ist absteigend geordnet: aktuelle Datumswerte zuerst, weiter zurückliegende danach. Die Schlusskurse (Spalte B) sind in Euro. Zusätzlich berechnen wir in Spalte C die Rendite (prozentuelle Veränderung) pro Handelstag mit der Formel (Kurs = Schlusskurs):

$$\text{Rendite/Tag} = (\text{Kurs}_{\text{neu}} - \text{Kurs}_{\text{alt}})/\text{Kurs}_{\text{alt}}$$

Bemerkungen. Man darf die Rendite pro Handelstag nicht mit dem Zinssatz auf einem Sparbuch vergleichen. Nur an Handelstagen gibt es Schlusskurse, während Zinsen pro Kalendertag (auch Wochenende) berechnet werden. Für die Präsentation wäre es aber eine unnötige Komplikation, mit Renditen pro Kalendertag zu rechnen.

Wir haben einen langen Zeitraum gewählt, um einen großen Datensatz mit ausreichend vielen Beobachtungen von seltenen Ereignissen zu erhalten. In der Praxis werden mehrere Jahre alte Daten nicht verwendet, weil sie wegen geänderter Rahmenbedingungen (etwa steigende Produktionskosten) zu irreführenden Prognosen führen können. Vergleichbare Informationen sind auch für Aktien verfügbar. Banken verwerten für ihre Berechnungen bei Aktien bis zu 1.500 Daten pro Tag, weil sie hohe Anforderungen an die Genauigkeit haben. Aggregierte Daten, z. B. Jahresmittel, sind für Risikobewertungen nicht ratsam.

Abb. 1: Tagesschlusskurse für 1 Feinunze Gold (3.703 Handelstage vom 02.01.2001 bis 14.05.2015)

Stochastik in der Schule 36 (2016) 2, S. 20–24

3 Risikomaße

3.1 Verlustserien

Wir fragen uns als erstes: Wie häufig sind Gewinne und Verluste, also Handelstage mit positiver oder negativer Tagesrendite? Dies ist in Excel rasch mit der Funktion ZÄHLENWENN beantwortet.

Mit =ZÄHLENWENN(C3:C3704; "=0") zählt man sechs Tage, an denen sich der Kurs nicht verändert hat. Mit =ZÄHLENWENN(C3:C3704; ">0") zählt man 1.946 Tage mit positiver Rendite. Analog zählt man 1.750 Tage mit negativer Rendite. An p = 52,7 % der Handelstage hätte man demnach bereits am darauffolgenden Tag mit Gewinn verkaufen können.

	C	D
1	Rendite/Tag	Länge (Verlustserie)
2		
3	=(B2-B3)/B3	=WENN(C3<0; 1; 0)
4	0,66 %	=WENN(C4<0; D3+1; 0)

Tab. 2: Erweiterung der Tabelle 1 (Verlustserien)

Als nächstes fragen wir uns, mit wie langen Verlustserien man rechnen muss. Dazu erweitern wir unser Tabellenblatt um die Spalte D (Tabelle 2). Wenn die Tagesrendite in Zelle C3 negativ ist, schreiben wir eine 1, sonst 0. Die Formel in Zelle D4 kopieren wir bis ans Ende der Tabelle. Sie besagt: Ist die Tagesrendite in der Zeile 4 negativ, so addieren wir in D4 zur bisherigen Länge der Verlustserie (1) eine weitere 1; sonst beginnen wir wieder mit Null zu zählen (bis zum Beginn der nächsten Verlustserie).

Werten wir dies mit dem Befehl =MAX(D:D) aus, so erhalten wir: Die längste Verlustserie dauerte acht aufeinanderfolgende Handelstage.

Wie oft diese und kürzere Verlustserien eingetreten sind, zählt man in Tabelle 3 mit der Funktion HÄUFIGKEIT(Daten; Klassen). Dabei zählt die Klasse 0 die Tage ohne Verlust, die Klasse 1 die Handelstage in einer Verlustserie der Länge 1, die am nächsten Tag endet, usw. Tabelle 3 vergleicht auch die relativen Häufigkeiten von Verlustserien der Länge $n = 0, 1, 2, \ldots$ mit einer geometrischen Verteilung: $p \cdot (1-p)^n$ für p = 52,7 % (Handelstage ohne Verlust).

Bemerkung. Bei der Eingabe von HÄUFIGKEIT ist zu beachten, dass dies ein Matrixbefehl ist, wo die Eingabe durch gleichzeitiges Drücken von drei Tasten erfolgt: Steuerung, Hochstellen und Enter.

Klasse	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	geometrische Verteilung
0	1.952	52,7 %	52,7 %
1	979	26,4 %	24,9 %
2	430	11,6 %	11,8 %
3	200	5,4 %	5,6 %
4	92	2,5 %	2,6 %
5	31	0,8 %	1,2 %
6	13	0,4 %	0,6 %
7	3	0,1 %	0,3 %
8	2	0,1 %	0,1 %
Summe	3.702	100,0 %	

Tab. 3: Absolute und relative Häufigkeit von Verlustserien

3.2 Volatilität und Histogramm

Eine weitere Risikobewertung verwendet die statistischen Kennzahlen der Tagesrenditen, um Aussagen über die Höhe der Tagesverluste zu gewinnen. Mittelwert und Standardabweichung sind die bekanntesten Größen. Man denke an die Physik, wo z. B. eine Länge mehrmals gemessen wird. Die Länge wird dann als Mittelwert aus den Messgrößen angegeben. Die Messgenauigkeit wird mit der Standardabweichung angegeben (z. B. als 1 m ± 0,5 mm).

Der Mittelwert der Renditen berechnet sich mit dem Befehl MITTELWERT zu μ = 0,04 %. Der Mittelwert der Tagesrenditen ist für alle Finanzprodukte typischerweise sehr klein und für die Risikobewertung von geringem Interesse.

Wichtiger ist die Beurteilung der zufälligen kurzfristigen prozentuellen Schwankungen, die *Volatilität*. Je höher sie ist, desto mehr Geld kann von einem Tag auf den nächsten verloren werden. Die Volatilität wird aus den historischen Daten als Standardabweichung σ = 1,1 % der Tagesrenditen (STABW.N) berechnet.

Man beachte, dass im physikalischen Beispiel der Messwert größer als die Unsicherheit ist. Bei den Renditen ist es umgekehrt: σ ist größer als μ. Wäre es anders, könnte man fast risikolos investieren!

Je höher die Volatilität desto risikoreicher die Investition. Durch Vergleich mehrerer Finanzprodukte kann man jene herausfiltern, die eine möglichst hohe Tagesrendite bei möglichst kleiner Streuung aufweisen.

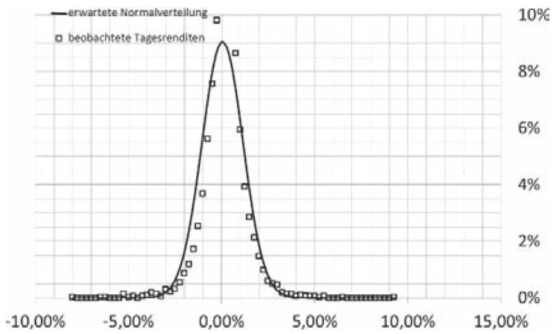

Abb. 2: Häufigkeitsverteilung der Renditen und Normalverteilung

Bemerkung. Mittelwert und Streuung hängen vom betrachteten Zeitraum ab (hier 1 Handelstag).

Uns interessiert: Sind die beobachteten Tagesrenditen normalverteilt? Dies kann man in erster Näherung mit einer Häufigkeitsverteilung (Abbildung 2) prüfen.

Zur Berechnung legen wir eine Tabelle in Excel wie folgt an. Zuerst berechnet man eine Häufigkeitstabelle der beobachteten Tagesrenditen als HÄUFIGKEIT(Daten; Klassen). Die Daten sind die Renditen in Spalte C und die Klassen gehen von -8 % (Minimum der Renditen: $-8{,}12$ %) bis 9,5 % (Maximum der Renditen: 9,24 %) in 0,25 % Schritten. Daraus werden in der Nachbarspalte die relativen Häufigkeiten durch Division mit der Anzahl aller Daten gebildet. Anschließend wertet man zum Vergleich in der nächsten Spalte die unter der Normalverteilung erwarteten Werte mit der Formel „mittlere Dichte mal Intervallbreite“ aus. Der Befehl lautet NORM.VERT(x; μ; σ; 0)*0,25%, wobei für x die jeweilige Klassenmitte eingesetzt wird, für $\mu = 0{,}04$ % und $\sigma = 1{,}1$ % die Parameter der als Modell gewählten Normalverteilung, und 0 besagt, dass die Dichtefunktion und nicht die Verteilungsfunktion berechnet wird.

3.3 Value-at-Risk für einen Tag

Wettet man auf ansteigende oder fallende Kurse, so sind diese Wetten zeitlich begrenzt, z. B. für eine vorgegebene Haltedauer (während der man das Gold nur verkauft, wenn unbedingt nötig). Wettet man mit *fremdem Geld*, so sollte man einen Eigenkapitalpuffer anlegen, um im Falle eines Verlusts Zahlungen weiterhin bedienen zu können. Das gilt nicht nur für Privatanleger, sondern auch für Banken und Versicherungen.

Wie hoch soll der Eigenkapitalpuffer sein und wie kann man diesen abschätzen? Dazu untersucht man in Abbildung 2 die linken Ausläufer („Verteilungsschwänze“) der Häufigkeitsverteilung.

Wir berechnen zuerst die Reserve für eine Haltedauer von einem Tag: Ein kompletter Pessimist wird sagen: „Der höchste Tagesverlust war $-8{,}12$ %. Daher rechne ich auch mit diesem.“ Wer etwas optimistischer ist, wird einwenden, dass das Minimum der Tagesrenditen nur einmal unter 3.702 Werten aufgetreten ist. Mit etwas Glück wird die Tagesrendite am Folgetag nicht einen der kleinsten Werte annehmen. Um auszudrücken, wie optimistisch man ist, gibt man an, mit welcher Sicherheit man zahlungsfähig bleiben will:

Welche Kapitalreserve muss man bilden, falls man mit 99 % Sicherheit zahlungsfähig bleiben will, wenn man heute kauft und morgen verkauft? Man nennt diese Kapitalreserve den *Value-at-Risk* (VaR) bei einem Tag Haltedauer und 99 % Sicherheit.

Wenn wir die Tagesrenditen der Größe nach von klein nach groß ordnen, dann liegen ca. 1 % von 3.702 Daten unter dem 37. Wert (Tagesrendite $-3{,}15$ %) und 99 % darüber. Das Sortieren kann man sich ersparen mit dem Befehl KKLEINSTE. Dieser liefert ebenfalls $-3{,}15$ %. Das gleiche Ergebnis liefert die Funktion QUANTIL.EXKL zur Berechnung der nötigen Barreserve als 1 %-Quantil.

Wenn man somit an einem zufällig gewählten Tag unserer Beobachtungsreihe mit geborgten 10.000 € Gold gekauft hätte, dann hätten 315 € Eigenkapital (plus Spesen) an fast allen Tagen ausgereicht, um die Schulden am nächsten Tag zurückzuzahlen, außer an 36 Tagen (1 % aller Beobachtungen) mit besonders hohen Verlusten. Man nennt diese Berechnung von VaR historische Simulation.

3.4 Value-at-Risk für mehrere Tage

Der Gesetzgeber schreibt Banken vor, dass sie ausreichend Eigenkapital zurücklegen müssen (Bundesbank, 2013). Wir betrachten folgende Vorgabe: Eine Bank soll mit 99 % Sicherheit während einer Haltedauer von $H = 10$ Tagen allfällige Verluste durch Marktrisiken ausgleichen können. Als Datengrundlage dient die Kursentwicklung von mindestens 250 Handelstagen.

Tabelle 4 illustriert die Berechnung von VaR für die Haltedauer von zehn Tagen für Gold. In D12 wird der maximale *prozentuelle Verlust* während der Haltedauer $H = 10$ berechnet (0 % bei Gewinnen). Die Formel wird nach unten kopiert. Ausgehend vom Kurs am 1. Mai 2015, also B12, beobachtet man die Kurse der folgenden $H = 10$ Tage. Der größte Verlust tritt dort ein, wo der Kurs minimal ist, MIN(B2:B12) – B12. In Zelle D12 berechnet man den Verlust als Prozent vom Kapital (B12).

	A	B	C	D
1	Datum	Schlusskurs	Rendite/Tag	VaR für H = 10 bei 99 % Sicherheit:
2	14.05.2015	1067,50		=QUANTIL.EXKL(D12:D3704; 0,01)
3	13.05.2015	1070,91	−0,32 %	Maximaler prozentueller Verlust, der innerhalb von 10 Tagen beobachtet wird:
…	…			
12	01.05.2015	1052,14	0,02 %	(MIN(B2:B12) – B12)/B12

Tab. 4: Fortsetzung von Tabelle 1 zur Abschätzung von VaR für 10 Tage Haltedauer aus historischen Daten

In D2 wird das 1 %-Quantil der Verluste als −9,4 % ausgewertet. Es besagt: Mit 99 % Sicherheit gehen innerhalb von 10 Tagen maximal 9,4 % des eingesetzten Kapitals verloren, wenn am Tag mit dem ungünstigsten Kurs verkauft werden muss.

Bemerkung. Wegen der fehlenden Unabhängigkeit werden hohe Verluste gehäuft beobachtet. Wenn man diese Abhängigkeit vermeiden will, kann man nur jeden zehnten Wert aus Spalte D für die Berechnung des Quantils verwenden (Auswahl mittels BEREICH.VERSCHIEBEN).

3.5 Q-Q-Plot

Wir fragen nun, ob die Berechnung von VaR unter der Annahme eines Normalverteilungsmodells vereinfacht werden kann und ob das gute Werte für den VaR liefert. Dazu betrachten wir den VaR für einen Tag. Abbildung 2 legt nahe, dass die Daten durch eine Normalverteilung mit μ = 0,04 % und σ = 1,1 % beschrieben werden können.

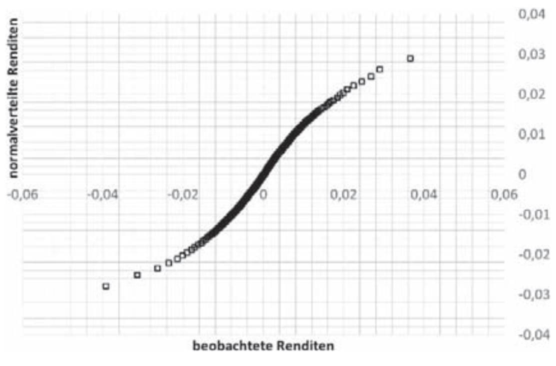

Abb. 3: Q-Q-Plot der Tagesrenditen

Wir berechnen das 1 %-Quantil dieser Verteilung. Dies geschieht mit NORM.INV(1 %; 0,04 %; 1,1 %) = −2,52 %. Zum Vergleich beträgt der für unsere Daten beobachtete Verlust −3,15 % (Abschnitt 3.3). Es folgt: Die Normalverteilung hat VaR deutlich unterschätzt.

Woher kommt dieser Unterschied? Man erkennt diesen nicht in Abbildung 2. Vielmehr suggeriert Abbildung 2, dass das Normalverteilungsmodell gerade bei den linken und rechten Ausläufern („Verteilungsschwänze") sehr gut passt.

Während nämlich Abbildung 2 die Normalverteilung und die Renditen im normalen Schwankungsbereich vergleicht, kommt es beim VaR auf die hohen Kursschwankungen an; darüber kann man aus Abbildung 2 nicht viel ablesen.

Um zu klären, ob die Normalverteilung (μ = 0,04 %, σ = 1,1 %) eine gute Beschreibung der Häufigkeiten von besonders hohen bzw. niedrigen Tagesrenditen liefert, benötigt man ein anderes Diagramm, den sogenannten *Q-Q-Plot*. Damit werden beobachtete und theoretisch erwartete Quantile miteinander verglichen. Allgemein gibt das α-Quantil q an, dass unterhalb von q der Anteil α der Daten liegt und darüber der Anteil $1 - \alpha$.

Die Berechnung erfolgt wie in Tabelle 5. Bei Abbildung 2 haben wir auf der x-Achse die Tagesrenditen aufgetragen und auf der y-Achse deren relative Häufigkeit. Nun tragen wir auf der x-Achse die α-Quantile der Tagesrenditen und auf der y-Achse entsprechend die α-Quantile der als Modell gewählten Normalverteilung für α = 0,5 % bis 99,5 % auf (Spalte E).

	D	E	F
1	Quantil	Normalverteilungsmodell	empirisch
2	0,5 %	=NORM.INV (D2;0,04%;1,1%)= −0,0279	=QUANTIL.EXKL ($C$3:$C$3704;D2)
3	1,0 %	−0,025	−0,024

Tab. 5: Berechnung des Q-Q-Plots für Tabelle 1

Wenn die empirische Verteilung mit der Normalverteilung übereinstimmt, dann sollten diese Punktepaare auf der Diagonale ($y = x$) liegen. Bei Abbildung 3 ist die Abweichung von der Diagonale deutlich zu erkennen. Die S-Form bedeutet, dass die Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit besonders großer bzw. kleiner Kursveränderungen (ab ca. ±2,2 %) unterschätzt. Kritisch ist dies, wenn eine hohe Sicherheit verlangt wird: Bei 99,9 % muss die Wahrscheinlichkeit von seltenen Extremereignissen gut abgeschätzt werden, wofür sich die Normalverteilung aufgrund dieser Analyse nicht eignet.

Bemerkung. Die historische Simulation eignet sich für 99,9 % Sicherheit auch nicht, weil sie bei den Daten von Tabelle 1 nur auf drei Beobachtungen (0,1 % der Daten) beruht.

4 Ausblick

Der Value-at-Risk wurde von Till Guldimann Mitte der 1980-er Jahre definiert und für ein Risiko-Management System verwendet (Guldimann 2000). Guldimann ist von der Annahme ausgegangen, dass die Renditen durch eine zeitlich unabhängige Normalverteilung beschrieben werden können. Er hat auf der Grundlage dieses Modells errechnet, dass der Anteil $-\sigma \cdot \sqrt{H} \cdot \varphi(\alpha)$ des eingesetzten Kapitals zurückgelegt werden soll, wenn mit z. B. $1 - \alpha = 99$ % Sicherheit während einer Haltedauer von H Tagen auftretende Verluste abgedeckt werden sollen. Dabei bezeichnet σ die Volatilität der Tagesrenditen und $\varphi(\alpha)$ = NORM.INV(α; 0; 1) das α-Quantil der Standard-Normalverteilung. Eine elementare Beschreibung des Modells für reale Portfolios aus mehreren Positionen gibt Linsmeier & Pearson (2000).

In seinem eher populärwissenschaftlichen Buch „Der schwarze Schwan" hat Taleb (2015) kritisiert, dass die Finanzwirtschaft Entscheidungen zu stark von Modellen macht, die von Normalverteilungsannahmen abhängen, die nicht durch die Daten unterstützt werden. Unter der Verwendung solcher Modelle werden die „Schwarzen Schwäne" (seltene Ereignisse, mit denen niemand rechnet bzw. die man nicht für möglich gehalten hätte) so häufig, dass sie sogar zu Krisen führen können, behauptet Taleb.

H	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
hist	1,6 %	2,3 %	3,0 %	3,5 %	3,9 %
NV	1,8 %	2,6 %	3,1 %	3,6 %	4,1 %

Tab. 6: VaR unter 95 % Sicherheit mittels historischer Simulation (hist) und Normalverteilungsmodell (NV)

Das Normalverteilungsmodell für VaR ist ein Beispiel: Es hat sich durchgesetzt, obwohl die Annahme der Normalverteilung falsch ist (Q-Q-Plot). Ein Grund war, dass die historische Simulation und das Normalverteilungsmodell vor dreißig Jahren die ersten naheliegenden Ansätze waren, um das Marktrisiko zu quantifizieren und dass das Normalverteilungsmodell bei kurzen Haltedauern und niedriger Sicherheit brauchbar war (Tabelle 6).

Die Finanzmathematik hat inzwischen alternative Risikomaße entwickelt (Föllmer 2011) und Banken verwenden zur Berechnung von VaR theoretisch anspruchsvolle Simulationsmodelle (Gurrola-Perez & Murphy 2015).

Literatur

Bundesbank (2013). Bankinterne Methoden zur Ermittlung und Sicherstellung der Risikotragfähigkeit und ihre bankaufsichtliche Bedeutung. Monatsbericht März 2013.

Föllmer, H. (2011). Alles richtig und trotzdem falsch? Anmerkungen zur Finanzkrise und zur Finanzmathematik. In: *Stochastik in der Schule,* 31, S. 2–8.

Guldimann, T. M. (2000). The story of ‚RiskMetrics'. In: *Risk,* 13, S. 56–58.

Gurrola-Perez, P.; Murphy, P. (2015). Filtered historical simulation Value-at-Risk models and their competitors. Bank of England Working Paper #525, London.

Linsmeier, T. J.; Pearson, N. D. (2000). Value at Risk. In: *Financial Analysts Journal,* 03/2000, S. 47–67.

Taleb, N. (2015). Der schwarze Schwan. München: Albrecht Knaus Verlag.

Anschrift der Verfasser

Norbert Brunner und Manfred Kühleitner
Institut für Mathematik, DIBB
Universität für Bodenkultur (BOKU)
Gregor Mendel Strasse 33
A-1180 Wien
Norbert.Brunner@BOKU.ac.at,
Manfred.Kuehleitner@BOKU.ac.at